Науково-технічне відділення

Контрольні завдання з математики

9 клас

І рівень (повне і правильне розв’язання оцінюється в 2 бали**)**

1. Звільнитись від ірраціональності в знаменнику $\frac{1}{\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}+1}$.

2. Параметр трикутника дорівнює 12 см. та довжина однієї із сторін – 5 см. Знайти довжини решти сторін трикутника, якщо вони виражені натуральними числами.

3. Нехай *а*, *в* та *с* три натуральні числа, що задовольняють умову $a^3+в^3+c^3=3авс$. Довести, що $а = в = с$.

ІІ рівень (повне і правильне розв’язання оцінюється в 4 бали)

4. Визначити значення параметра $a \in R$, при кожному з яких рівняння $\frac{3}{2x-a}=\frac{4}{ax-8}$ має від’ємні розв’язки.

5. Знайти всі дійсні значення параметра *а,* для яких нерівність $ax^2-x+1-a<0$ має своїм наслідком нерівність $0\le x\le 1$.

6. Знайти найменший цілий корінь рівняння $x^2-2(к+2)x+12+к^2=0$, що має два різні корені.

ІІІ рівень (повне і правильне розв’язання оцінюється в 7 балів).

7. Розв’язати нерівність $\sqrt{x-4+4\sqrt{x-8}}-\sqrt{x-4-4\sqrt{x-8}}\le 2$.

8. Для всіх дійсних значень параметра *а* розв’язати рівняння $\sqrt{x-2a}+\sqrt{x-a^2-3}=\sqrt{2x-a^2-2a-3}.$

9. Знайти чотири цілих числа, що утворюють арифметичну прогресію, якщо найбільше з них дорівнює сумі квадратів трьох інших.

Контрольні завдання з математики

10 клас

I рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється в 2 бали)

1. Обчислити ($\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

2. Параметр рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см. Знайти його сторони, якщо відношення його висот дорівнює $^3/_2$.

3. Довести, що добуток $n\ (n+1)\ (n+2)$ $n \in N$ кратний 24 для $n=2m$.

II рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється в 4 бали)

4. Порівняти числа $\log_3{}^4$ та $\log{}_7{}^8$.

5. Обчислити aτc Sin (Cos 7) + aτc Cos (Cos 6).

6. На площині $x\cup y$ задано дві точки $A(1,3)$ та $B\ (2,5)$ на осі OX знайти таку точку C, щоб сума відстаней $d\ (AC) + d\ (BC)$ була б мінімальною.

III рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється в 7 балів).

7. Знайти значення параметра $a \in R$, при кожному з яких *рівняння* $9^x-2(a+1)3^x-3a^2+2a+1=0$ має 2 дійсних розв'язки.

8. Розв'язати систему нерівностей:

$$x^2+6x+5 \leq 0$$
$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+5x+5} \geq 2$$

9. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, вписаного в кулю радіуса R.

Контрольні завдання з математики

11 клас

І рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється в 2 бали)

1. Обчислити $(\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1+\sqrt{2}})\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$.

2. Знайти значення параметри *а є R*, при кожному з яких рівняння $x^2+2ax+a+2=0$ має один корінь, що належить інтервалу (-1,3).

3. Обчислити $Cos\ 20^{o}\cdot Cos\ 40^{o}\cdot Cos\ 80^{o}$.

ІІ рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється в 4 бали)

4. Знайти найбільший спільний дільник многочленів $P_3(x)=x^3+3x^2+4x+12$, $P_3(x)=x^3+4x^2+4x+3$.

5. Розв'язати нерівність $Cos^2x\text{-}2Cos\ x \le -\frac{3}{4}$.

6. *Нехай а, в, с* – довжини сторін трикутника.

Довести, що $ав + ас + вс \le a^2 + в^2 + c^2 < 2\ (ав + ас + вс)$.

ІІІ рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється в 7 балів).

7. Знайти всі значення параметра m, при кожному з яких система

$x^2 + 2x + m \le 0$
$x^2 - 4x - 6m \le 0$ має єдиний розв'язок.

8. Знайти область значень функцій $y=2^{5-4Sinx+3Cosx}$.

9. Визначити рівняння кулі, що дотикається координатних площин та площини $x + 2y + 2z - 10 = 0$.

Голова предметної комісії з математики

Кухарчук Микола Макарович - *професор Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут", доктор фізико-математичних наук*

Науково-технічне відділення

Контрольні завдання з фізики

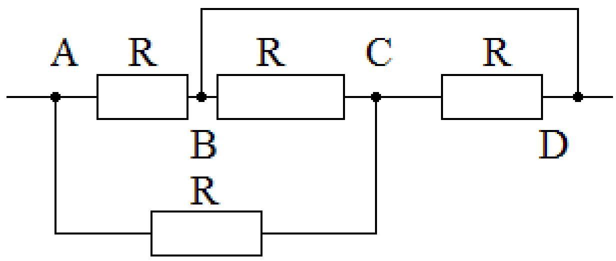
9 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Знайдіть кутову швидкість колеса автомобіля діаметром 50 см, що їде зі швидкістю 50 км/год.
2. Вода масою 200 г з початковою температурою 20 С гріється кип'ятильником, що має опір 200 Ом і підключений до мережі 220 В. За який час вода закипить?
3. В напрямку з пункту А до пункту В, що лежить на відстані 100 км, дує вітер зі швидкістю 10 м/с. З А в В вилітає літак, швидкість якого в безвітряну погоду 100 м/с. Літак долітає до пункту В, розвертається і повертається у А. Знайдіть повний час подорожі у секундах.

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. У мережу з напругою 220 В вмикають нагрівальний прилад. Опір підвідних дротів 11 Ом. Яким має бути опір приладу, щоб у ньому виділилась найбільша кількість тепла?
5. В *U*-подібну трубку, закриту з обох кінців поршнями масами m_1 і m_2, налито воду. На поршні масою m_1 лежить важок. При цьому рівні води в обох колінах трубки однакові. Як зміниться рівень води в колінах, якщо важок перекласти на другий поршень? Площа кожного поршня *S*, питома вага води *d*.
6. Чотири однакових резистори по 20 Ом кожен з'єднані так, як показано на рисунку. Визначити загальний опір цієї ділянки кола.



Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Супутник Землі масою m=10 кг, що рухається по коловій орбіті у високих шарах атмосфери, зазнає опору розрідженого повітря F=5·10^{-4} Н. Як зміниться швидкість супутника за один оберт навколо Землі? Висоту польоту супутника над поверхнею Землі вважати малою порівняно з радіусом Землі $R_{\oplus}$=6400 км.
8. Два кораблі *A* і *B* йдуть з заданими швидкостями і курсами, що перетинаються. На яку найменшу відстань вони наблизяться один до одного? Задачу розв'язати графічно.
9. Зенітна гармата може надати снаряду початкову швидкість v_0 у будь-якому напрямі. Треба знайти межу, яка відокремлює об'єкти, до яких снаряд з даної гармати може долетіти, від недосяжних об'єктів. Опором повітря знехтувати.

Контрольні завдання з фізики

10 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Мисливець стріляє з гвинтівки масою m = 5 кг. У скільки разів більшою буде швидкість віддачі гвинтівки, не притиснутої до плеча мисливця, порівняно зі швидкістю віддачі у випадку, коли він міцно притискає гвинтівку до плеча? Маса мисливця M = 80 кг.
2. Космічний корабель обертається по коловій орбіті навколо невідомої планети з періодом T = 1,5 год. Знайти масу планети, якщо радіус орбіти R = 6000 км.
3. Електричний подовжувач з двома розетками розрахований на напругу 220 В і силу струму 16 А. Які з наступних електроприладів і не можна одночасно підключати через подовжувач до електромережі: чайник потужністю 2 кВт, пилосос потужністю 1,6 кВт, праску потужністю 1,5 кВт?

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Парціальний тиск водяної пари в кімнатному повітрі при температурі 20 °С дорівнює p = 1,3 кПа. Знайти абсолютну вологість повітря.
5. Деяка кількість водню перебуває при температурі T_1 = 200 К і тиску p_1 = 400 Па. Газ нагрівають до температури T_2 = 10000 К, при якій практично всі молекули водню розпадаються на атоми. Визначити новий тиск газу, якщо його об’єм і маса залишилися незмінними.
6. До батарейки з ЕРС E = 4,5 В підключили резистор з опором R = 20 Ом. Напруга на резисторі виявилася рівною U = 3 В. Визначити струм короткого замикання.

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. У калориметр з теплоємністю C = 100 Дж/К, який містить V = 1 л води при температурі t_1 = 7 °С, кинули залізну кульку маси m = 100 г і температурою t_2 = 200 °С. Знайти температуру води після встановлення теплової рівноваги. Питомі теплоємності води і заліза дорівнюють відповідно $c_в$ = 4,18 Дж/(г·К), $c_з$ = 0,46 Дж/(г·К).
8. У кімнаті об’ємом V = 40 м^3 повітря має температуру t = 20 °С і відносну вологість r_1 = 20 %. Скільки води потрібно випарувати в кімнаті, щоб відносна вологість досягла r_2 = 50 % ? Тиск насиченої водяної пари при 20 °С дорівнює $p_{нас}$ = 2,33 кПа.
9. Знайти масу міді, що виділилася на електродах, якщо для її одержання електролітичним способом витрачено W = 5 кВт·год електроенергії. Електроліз проводився при напрузі U = 10 В, к.к.д. установки η = 75 %. Електрохімічний еквівалент міді k = 3,3·10^{-7} кг/Кл.

Контрольні завдання з фізики

11 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Тіло рівномірно зісковзує з похилої площини, що нахилена під кутом 30^o до горизонту. Визначити силу тертя
2. Конденсатор ємністю 200 мкФ, зарядили до напруги 200 В. Визначити енергію конденсатора.
3. Довжина світлової хвилі у вакуумі становить 600 нм. Якою буде частота цього світла у воді? Показник заломлення води 1,3.

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Газ, який займає об'єм 4 л при тиску 10^5 Па, нагрівають ізобарно так, що його густина зменшується у 2 рази. Яку кількість теплоти отримує газ?
5. Котушку з індуктивністю 3 Гн підключили до джерела ЕРС 15 В. Опори джерела та котушки знехтовно малі. Через який час струм у котушці досягне величини 50 А?
6. Кулька пружинного маятника масою 100 г рухається за законом $x = 0.05\sin(2\pi t + \pi / 3)$ (всі величини задані в СІ). Чому дорівнює максимальна потенціальна енергія пружини?

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Дві елементарні частинки з масами m_1 і m_2=4m_1 влітають з однаковими швидкостями в однорідне гальмівне електричне поле паралельно до ліній напруженості. Знайти відношення зарядів частинок, якщо друга пройшла в полі до зупинки вдвічі довший шлях, ніж перша.
8. Конденсатор коливального контуру приймача має ємність 0.5 мкФ. На яку довжину хвилі резонує контур приймача, якщо відношення максимального значення напруги на конденсаторі до максимального значення сили струму в котушці при резонансі дорівнює 2 В/А.
9. Мотоцикліст рухається по колу по циліндричній стіні діаметром 10 м. Коефіцієнт тертя між стіною та покришками становить 0,3. Чому дорівнює найменша швидкість руху мотоцикліста?

Голова предметної комісії з фізики

***Засєдка Людмила Миколаївна** – вчитель ліцею № 41 «Голосіївський м. Києва, кандидат фізико-математичних наук*

Фізико-математичне відділення

Контрольні завдання з математики

Секція “Математика”

9 клас

Завдання І рівня (по 2 бали)

1. Чи обов’язково буде правильним трикутник, у якому точка перетину висот – центр вписаного кола ?

2. Чи можна описати коло навколо чотирикутника *ABCD*, якщо $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$?

3. Розв’язати нерівність $\sqrt{2 - x - x^2} \geq \sqrt{2x^2 - x - 1}$.

Завдання ІІ рівня (по 4 бали)

4. Знайти усі значення *k*, при яких квадратне рівняння $x^2 - kx - (3k + 2) = 0$ має два цілих корені.

5. Чи існує трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 11 см, а бічні сторони 8 см і 6 см ? Відповідь обгрунтувати.

6. Дано коло радіуса *R*. В нього вписано три однакових кола, кожне з яких дотикається до двох інших. Знайти радіуси цих кіл.

Завдання ІІІ рівня (по 7 балів)

7. Довести, що число $3^{60} - 2^{60}$ без остачі ділиться на 5, 7, 11, 13, 19 і 211.

8. Розв’язати рівняння $2x^4 - 6x + 3 = 0$

9. Точка *M* знаходиться в площині квадрата *ABCD* і $MA = \sqrt{27}$ см, $MC = \sqrt{3}$ см, $MD = \sqrt{6}$ см. Знайти площу квадрата.

Контрольні завдання з математики

Секція "Математика"

10 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Нехай *ABCD* – неопуклий чотирикутник на площині, α – кут між прямими *AC* і *BD*. Довести, що площа *S* чотирикутника може бути обчислена за формулою $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

2. Зобразити на площині *O xy* множину точок, для координат яких справджується нерівність $5x + 2y \le 7\sqrt{xy}$

3. Задано наближені значення двох величин $a = 5{,}4 \pm 0{,}4$ та $b = 11{,}1 \pm 0{,}9$. Чи правильно, що $ab = 60{,}3 \pm 9{,}3$

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Чи існує трапеція, основи якої дорівнюють 9см і 11см, а бічні сторони 8 см і 6 см ? Відповідь обгрунтувати.

5. Розв'язати рівняння $x^3 + 2[x] = 5$, де $[x]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x.

6. В яких межах може змінюватись периметр трапеції, у якої діагоналі – бісектриси кутів при меншій основі, а одна з бічних сторін дорівнює 2 ?

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Відомо, що числа a, b, c – цілі, а рівняння $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ має корінь $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$. Довести, що це рівняння не має інших дійсних коренів.

8. Довести, що число $\underbrace{11\ldots1}_{n\ цифр}21\underbrace{55\ldots5}_{n-1\ цифр}801$ є квадратом цілого числа.

9. Довести, що існує пряма, яка перетинає усі три прямі, на яких лежать ребра AB, B_1C_1, DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$)

Контрольні завдання з математики

Секція “Математика”

11 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Знайти усі трійки (a,b,c), щоб рівняння $|x-a|+|x-b|=c$ мало єдиний розв’язок.

2. Задано наближені значення двох величин $a=5{,}4\pm 0{,}4$ та $b=11{,}1\pm 0{,}9$. Чи правильно, що $ab=60{,}0\pm 0{,}9$?

3. Скільки розв’язків має рівняння $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{2}-\sqrt{x}$?

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Розв’язати рівняння $x\log_3 2+\log_3(1-5x)=x\log_2 3+\log_2(1-5x)$

5. Довести, що число $\underbrace{44\ldots4}_{n\ цифр}34\underbrace{22\ldots2}_{n\ цифр}81$ є квадратом цілого числа.

6. Розв’язати нерівність $\dfrac{4\cdot 2^x-7}{x}>\dfrac{10}{1-2x}$

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник. З’ясувати, чи можливо, щоб $AB=5$ см, $BC=4\sqrt{2}$ см, $CD=5$ см, $DA=\sqrt{130}$ см, $AC=7$ см ?

8. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник, у якому $\angle BAC=7^\circ$, $\angle ACB=23^\circ$, $\angle CBD=53^{\circ\circ}$, $\angle BDA=46^\circ$. Довести, що $\angle CDB=21^\circ$.

9. Розв’язати рівняння $2\cos 9x+\cos 7x-\cos 11x=2\sqrt{2}$.

Голова предметної комісії з математики

Плахотник Володимир Васильович *– доцент кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук*

Фізико-математичне відділення

Контрольні завдання з математики

Секція “Фізика” і “Астрономія”

9 клас

Завдання І рівня (по 2 бали)

1. Чи обов’язково буде правильним трикутник, у якому точка перетину медіан – центр описаного кола ?

2. Чи можна описати коло навколо чотирикутника *ABCD*, якщо $\angle ADC = 30^\circ$, *AB* = 3, *BC* = 4, *AC* = 6 ?

3. Розв’язати нерівність $\sqrt{3-2x-x^2} \geq \sqrt{2x^2-x-1}$.

Завдання ІІ рівня (по 4 бали)

4. Знайти усі значення *k*, при яких квадратне рівняння $x^2 - kx + k = 0$ має тільки цілі корені.

5. Чи існує трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 11 см, а бічні сторони 8 см і 6 см ? Відповідь обґрунтувати.

6. На координатній площині $O\,xy$ зобразити множину точок (x, y) для яких

$$|x-y| + xy = 0$$

Завдання ІІІ рівня (по 7 балів)

7. Для яких пар натуральних чисел (*m; n*) буде цілим число $\dfrac{3m+4}{mn-1}$?

8. Знайти усі трійки дійсних чисел (*x;y;z*), щоб $\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 4 \\ z^4 + yz^2 + xz + 1 = 0 \end{cases}$.

9. Точка *M* знаходиться в площині квадрата *ABCD* і *MA* = $\sqrt{27}$ см, *MC* = $\sqrt{3}$ см ,*MD* = $\sqrt{6}$ см. Знайти площу квадрата.

Контрольні завдання з математики

Секція “Фізика” і “Астрономія”

10 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{2}-\sqrt{x}$.

2. Знайти один із внутрішніх кутів $\alpha,\ \beta$ чи γ трикутника, відповідні сторони якого дорівнюють *a, b, c* і $b^2=a^2+c^2-2ab\sin\gamma$

3. Знайти всі значення *a*, при яких точки (0; 0), (1; – 1) та (– 2; *a*) будуть точками екстремуму деякого многочлена четвертого степеня.

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Знайти усі трійки (a,b,c), для яких рівняння $|x-a|+|x-b|=c$ має єдиний розв’язок.

5. Нехай *ABCD* – трапеція, що є основою піраміди з вершиною *S* ($BC \,||\, AD$). Кути між гранями BCS , ADS і основою дорівнюють відповідно 70° і 50°. Знайти кут між гранями BCS і ADS

6. Довести, що число $\underbrace{44...4}_{n\ цифр}34\underbrace{22...2}_{n\ цифр}81$ є квадратом цілого числа.

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Площа опуклого чотирикутника дорівнює 16 $м^2$, а периметр – 16 м. Довести, що чотирикутник обов’язково є квадратом.

8. Довести нерівність $\sin x+2\sin 2x-\sin 3x<3$.

9. Розв’язати рівняння $x^2+2=5\sqrt{x^3-1}$.

Контрольні завдання з математики

Секція “Фізика” і “Астрономія”

11 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Знайти площу фігури, заданої на площині Oxy нерівністю $|x|+|y|\le 3$.
2. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{x}-\sqrt{2}$.
3. Знайти всі значення a, при яких точки (0; 0), (1; – 1) та (– 2; a) будуть точками екстремуму деякого многочлена четвертого степеня.

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Площа опуклого чотирикутника дорівнює 1 м^2, а периметр – 4 м. Довести, що чотирикутник обов’язково є квадратом.

5. Знайти найменше просте число p, для якого існують такі натуральні числа m і n, що $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{25}{p}$.

6. Знайти усі розв’язки рівняння $2+\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=4\cos^2 3x$, що належать проміжку $[0,\frac{\pi}{2}]$

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Довести нерівність $3\sin x+2\sin 2x-\sin 3x<5$.

8. Розв’язати рівняння $9^{\sqrt[3]{\log_3^2 x}}=2+x^{\sqrt[3]{\log_x 3}}$

9. Довести, що існує пряма, яка перетинає усі три прямі, на яких лежать ребра AB, B_1C_1, DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Голова предметної комісії з математики

Плахотник Володимир Васильович – *доцент кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук*

Фізико-математичне відділення

Контрольні завдання з математики

Секція “Економіка” та “Мікроекономіка”

9 клас

Завдання І рівня (по 2 бали)

1. Чи обов’язково буде правильним трикутник, у якому точка перетину висот–центр описаного кола ?

2. Чи правда, що $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=2$?

3. Розв’язати нерівність $\sqrt{3-2x-x^2}\geq\sqrt{2x^2-x-1}$.

Завдання ІІ рівня (по 4 бали)

4. Дано коло радіуса *R*. В нього вписано три однакових кола, кожне з яких дотикається до двох інших. Знайти радіуси цих кіл.

5. Чи існує трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 11 см, а бічні сторони 8 см і 6 см ? Відповідь обгрунтувати.

6. На координатній площині *Oxy* зобразити множину точок (x, y) для яких

$$|x-y|+xy=0$$

Завдання ІІІ рівня (по 7 балів)

7. Знайти усі пари натуральних чисел (*m; n*), для яких $\frac{3m+4}{mn-1}$ – ціле число.

8. Довести нерівність $a^2-4ce\geq 0$, якщо для чисел *a, b, c, d, e, f* справджується нерівність $c^2f^2+d^2e^2-abcf-abde-2cdef+b^2ce+a^2df<0$.

9. Знайти усі значення параметра *a*, при яких рівняння $(ax-x+1)(ax-3x+2)=0$ має єдиний розв’язок на проміжку [3; 5] .

Контрольні завдання з математики

Секція “Економіка” та “Мікроекономіка”

10 клас

Завдання І рівня (по 2 бали)

1. Чи обов’язково буде правильним трикутник, у якому точка перетину бісектрис – центр описаного кола ?

2. Знайти площу фігури, заданої на площині Oxy нерівністю $|x|+|y|\le 2$.

3. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2+x-x^2}=\sqrt{2}-\sqrt{x}$.

Завдання ІІ рівня (по 4 балів)

4. Довести, що єдиним дійсним розв’язком рівняння $x^3+9x-6=0$ є число

$$x=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}$$

5. Знайти усі значення параметра a, при яких рівняння

$(ax-x+1)(ax-3x+2)=0$ має єдиний розв’язок на проміжку [3; 5] .

6. Чи існує трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 11 см, а бічні сторони 8 см і 6 см ? Відповідь обґрунтувати.

Завдання ІІІ рівня (по 7 балів)

7. Довести, що $a^2-4ce\ge 0$, якщо для чисел a, b, c, d, e, f справджується нерівність $c^2f^2+d^2e^2-abcf-abde-2cdef+b^2ce+a^2df<0$.

8. Довести, що число $\underbrace{44...4}_{n\ цифр}50\underbrace{22...2}_{n\ цифр}41$ є квадратом цілого числа.

9. Площа опуклого чотирикутника дорівнює 1 м^2, а периметр – 4 м. Довести, що чотирикутник обов’язково є квадратом.

Контрольні завдання з математики

Секція “Економіка” та “Мікроекономіка”

11 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Нехай $ABCD$ – неопуклий чотирикутник на площині, α – кут між прямими AC і BD. Довести, що площа S чотирикутника може бути обчислена за формулою $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

2. Знайти всі значення a, при яких точки (0; 0), (1; – 1) та (– 2; a) будуть точками екстремуму деякого многочлена четвертого степеня.

3. Задано наближені значення двох величин $a = 5{,}4 \pm 0{,}4$ та $b = 11{,}1 \pm 0{,}9$. Чи правильно, що $ab = 60{,}3 \pm 9{,}3$?

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Довести, що число $\underbrace{44...4}_{n\ цифр}5\underbrace{155...5}_{n\ цифр}84$ є квадратом цілого числа.

5. Знайти найменше просте число p, для якого існують такі натуральні числа m і n, що $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{35}{p}$.

6. Знайти усі значення параметра a, при яких рівняння $(ax - x + 1)(ax - 3x + 2) = 0$ не має жодного розв’язку на проміжку [0; $\frac{1}{2}$].

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Розв’язати нерівність $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \le \sqrt[4]{8}$

8. Розв’язати рівняння $9^{\sqrt[3]{\log_3^2 x}} = 2 + x^{\sqrt[3]{\log_x 3}}$

9. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник, у якому $\angle BAC = 9^\circ$, $\angle ACB = 21^\circ$, $\angle CBD = 51^\circ$, $\angle BDA = 42^\circ$. Довести, що $\angle CDB = 27^\circ$.

Голова предметної комісії з математики

Плахотник Володимир Васильович – *доцент кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук*

Фізико-математичне відділення

Контрольні завдання з математики

Секція “Прикладна математика”

9 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Чи обов’язково буде правильним трикутник, у якому точка перетину медіан – центр вписаного кола ?

2. Одна із сторін трикутника, яка лежить проти кута 60°, дорівнює $2\sqrt{7}$, інша сторона дорівнює 6. Якою може бути третя сторона трикутника?

3. Знайти усі значення *k*, при яких квадратне рівняння $x^2 - kx + k = 0$ має тільки цілі корені.

Завдання IIрівня (по 4 бали)

4. Зобразити на площині *Oxy* множину точок (x, y), для координат яких справджується нерівність $4x + 3y \le 7\sqrt{xy}$.

5. Довести нерівність $a^2 - 4ce \ge 0$, якщо для чисел *a, b, c, d, e, f* справджується нерівність $c^2 f^2 + d^2 e^2 - abcf - abde - 2cdef + b^2 ce + a^2 df < 0$.

6. Знайти усі значення параметра *a*, при яких рівняння $(ax - x + 1)(ax - 3x + 2) = 0$ не має жодного розв’язку на проміжку [0; $\frac{1}{2}$].

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Знайти усі пари цілих чисел (*x*, *y*), для яких $\sqrt{xy} - \sqrt{x} = \sqrt{141 - 6\sqrt{y}}$.

8. Знайти найменше значення виразу $L = \dfrac{2x + y - 4}{x + 2y - 8}$, якщо $\begin{cases} 3 \le x \le 4 \\ 2 \le y \le 5 \end{cases}$.

9. Довести, що число $\underbrace{11...1}_{n\ цифр}20\underbrace{22...2}_{n-1\ цифр}409$ є квадратом цілого числа.

Контрольні завдання з математики

Секція “Прикладна математика”

10 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Нехай $ABCD$ – неопуклий чотирикутник на площині, α – кут між прямими AC і BD. Довести, що площа S чотирикутника може бути обчислена за формулою
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha .$$

2. Розв’язати рівняння $x^3 + 3[x] = 7$, де $[x]-$ найбільше ціле число, яке не перевищує x.

3. Задано наближені значення двох величин $a = 5{,}4 \pm 0{,}4$ та $b = 11{,}1 \pm 0{,}9$. Чи правильно, що $ab = 60{,}0 \pm 0{,}9$?

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Знайти усі трійки (a, b, c), для яких рівняння $|x-a| + |x-b| = c$ має єдиний розв’язок.

5. Довести, що єдиним дійсним розв’язком рівняння $x^3 - 12x - 20 = 0$ є число $x = \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}$.

6. В яких межах може змінюватись периметр трапеції, у якої діагоналі – бісектриси кутів при більшій основі, а одна з бічних сторін дорівнює 2 ?

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Довести, що число $\underbrace{11...1}_{n+1\ цифр}6\underbrace{22...2}_{n\ цифр}81$ є квадратом цілого числа.

8. Площа опуклого чотирикутника дорівнює 1 м^2, а периметр – 4 м. Довести, щочотирикутник обов’язково є квадратом.

9. Довести, що існує пряма, яка перетинає усі три прямі, на яких лежать ребра AB, B_1C_1, DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Контрольні завдання з математики

Секція “Прикладна математика”

11 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Задано наближені значення двох величин $a = 5{,}4 \pm 0{,}4$ та $b = 11{,}1 \pm 0{,}9$.
Чи правильно, що $ab = 60{,}3 \pm 9{,}3$?

2. Знайти усі значення параметра a, при яких рівняння
$(ax - x + 1)(ax - 3x + 2) = 0$ має єдиний розв’язок на проміжку [3; 5]

3. Розв’язати рівняння $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{2 + x - x^2} = \sqrt{2} - \sqrt{x}$.

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Нехай $c^2 f^2 + d^2 e^2 - abcf - abde - 2cdef + b^2 ce + a^2 df < 0$ для деяких чисел a, b, c, d, e, f. Довести, що $a^2 - 4ce \geq 0$.

5. Довести, що немає жодного цілого числа n , щоб число $\frac{11n + 8}{7n + 3}$ було цілим.

6. Розв’язати нерівність $\frac{4 \cdot 2^x - 7}{x} < \frac{10}{1 - 2x}$

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник. З’ясувати, чи можливо, щоб
AB = 13 см, $BC = \sqrt{145}$ см, $CD = 5\sqrt{2}$ см, $DA = 7\sqrt{2}$ см, AC = 6 см ?

8. Довести, що існує пряма, яка перетинає усі три прямі, на яких лежать ребра AB, B_1C_1, DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

9. Розв’язати рівняння $2\cos 9x + \cos 7x - \cos 11x = 2\sqrt{2}$

Голова предметної комісії з математики

Плахотник Володимир Васильович – *доцент кафедри загальної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат фізико-математичних наук*

Фізико-математичне відділення

Контрольні завдання з економіки

10 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

Завдання 1

У 2002 р. середня ціна односімейного будинку піднялась з 97 тис. дол. у квітні до 106 тис. дол. у травні. За цей же період кількість проданих будинків скоротилась з 724 тис. до 616 тис. Якою буде, згідно з цими даними, дугова еластичність попиту на будинки, якщо припустити, що умови кредиту та інші фактори, що впливають на продаж будинків, залишились без змін?

Завдання 2

Припустимо, Ви плануєте поїздку на Гавайські острови через чотири роки (на кінець четвертого року). Її ціна становить 5000 дол. Ваші заощадження знаходяться у банку, який нараховує Вам 12% річних (складного відсотку). Якою повинна бути мінімальна сума у Вас на рахунку, щоб Ви могли собі дозволити цю подорож у намічений термін?

Завдання 3

Інна хоче придбати два квитки на концерт. Ціна квитка складає 15 грн., до того ж, на думку Інни, їй доведеться простояти у черзі 30 хв., щоб придбати квитки. Якщо її заробітна плата становить 16 грн. за годину, то чому дорівнюють економічні (вмінені) витрати на придбання обох квитків? Припустимо, придбавши дефіцитні квитки Інна не зможе відвідати концерт, і тому здійснить їх перепродаж за ціною 22 грн. за квиток. Чи отримає вона у цьому разі економічний прибуток і яким буде його розмір?

Завдання II рівня (по 4 бали)

Завдання 4

Використовуючи наведені дані про діяльність малого підприємства заповніть пропуски в таблиці і з’ясуйте по кожному варіанту, що доцільніше для підприємства:

а) закритися;
б) збільшити обсяг виробництва для мінімізації збитків;
в) зменшити обсяг виробництва для мінімізації збитків;
г) збільшити обсяг виробництва максимізації прибутку;
д) зменшити обсяг виробництва для максимізації прибутку;
е) нічого не змінювати.

Поясніть чому?

№	P	Q	TR	TC	FC	VC	ATC	AVC	MC
1		6	36				6	5	6
2			50	40	18		8		11
3			13,6		2	10	3		2,7

Завдання 5

Функція середніх витрат конкурентної фірми, що виробляє чоловічі краватки, виражається рівнянням: $AC = (Q-45)^2+(2Q+100)/Q$, де AC – середні витрати (дол.), Q – обсяг випуску (тис. шт.). Визначте, за якої ціни фірма прийме рішення про припинення виробництва.

Завдання 6

Фірма-монополіст визначила, що за існуючого попиту на її продукцію функція залежності середньої виручки від обсягу пропозиції описується формулою $AR = 10 - Q$, де AR – середня виручка (тис. грош. од.), Q – обсяг випуску (тис. шт.). Якщо фірма несе середні витрати по виробництву, виражені функцією $AC = (16+Q^2)/Q$, де AC – середні витрати (тис. грош. од.), Q – обсяг випуску (тис. шт.), то який прибуток чи збиток отримує фірма, оптимізуючи випуск у короткостроковому періоді?

Завдання III рівня (по 7 балів)

Завдання 7

Попит на маргарин описується рівнянням: $Q_D= 18-2P$, пропозиція – $Q_S = 4P$ (де P – вимірюється в грн., Q – у тоннах). Через зниження ціни на вершкове масло величина попиту на маргарин змінилась на 8% за кожного значення ціни. Одночасно, через підвищення ціни на молоко пропозиція маргарину змінилась на 15% за кожного значення ціни.

1. Визначте нові функції попиту і пропозиції маргарину.
2. Розрахуйте абсолютні зміни рівноважної ціни і рівноважного обсягу продажу маргарину.
3. Виходячи із значень нових функцій попиту і пропозиції (п.1) визначте, яким буде наслідок встановлення верхньої межі ціни (ціни „стелі”) у 3 грн.? Чи перебуватиме ринок маргарину в рівновазі? Якщо ні, то яка кількість надлишкового попиту або пропозиції виникне за цієї межі ціни?
4. Виходячи із значень нових функцій попиту і пропозиції (п.1) розрахуйте, на яку величину зміниться дохід продавців, якщо буде введено поштучний податок у розмірі 0,5 грн.?

Завдання 8

Відомо, що для споживача:

✓ еластичність попиту на апельсини за ціною становить: $E_{d\ (a)}= -1$;

✓ еластичність попиту на мандарини за ціною становить: $E_{d\ (p)} = -1,5$;

- ✓ еластичність перехресного попиту на апельсини за ціною мандаринів становить: E_{ap} = +2;
- ✓ еластичність попиту на апельсини за доходом рівна: E_y = +3.

Дайте відповіді на такі питання та обґрунтуйте їх розрахунками:

а) як зміниться обсяг попиту на апельсини, якщо ціни на мандарини зменшаться на 2%? Як при цьому зміниться виручка виробника?

б) як зміниться обсяг попиту на мандарини, якщо ціна на них зросте на 3%? Як при цьому зміниться виручка виробника?

в) як зміниться обсяг попиту на апельсини, якщо доход споживача зросте на 5%? Як при цьому зміниться виручка виробника?

Завдання 9

Незалежне споживання двох благ – X та Y приносить корисність, величина якої відповідає певній кількості того чи іншого блага. Ця залежність представлена у таблиці:

Кількість блага, шт.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Корисність блага X, ютіл	40	76	108	136	160	180	196	208	216	220
Корисність блага Y, ютіл	30	57	81	102	120	135	147	156	162	165

Величина доходу споживача рівна 64 грош. од., а ціни благ X та Y, відповідно, 8 і 3 грош. од.

1. Визначте структуру споживання, що відповідає оптимуму споживача.
2. Як зміниться споживчий вибір, що максимізує корисність, при зростанні ціни на товар Y до 4 грош. од.?
3. За якої величини доходу споживач взагалі не буде купувати товар Y (за незмінності інших умов)?

Голова предметної комісії з економіки — ***Филюк Галина Михайлівна*** *- доцент кафедри теоретичної та прикладної економіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат економічних наук*

Член предметної комісії з економіки — ***Чубук Леся Петрівна*** *- доцент кафедри теоретичної та прикладної економіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат економічних наук*

Контрольні завдання з економіки

11 клас

Завдання І рівня (по 2 бали)

Завдання 1

Внаслідок обмеженості попиту житлового фонду функція пропозиції житла у м. Вієнна має вигляд $Q_S = 600$, де Q_S – обсяг пропозиції (у тисячах житлових одиниць). Функція попиту на усе житло має вигляд $Q_D = 1100 - P$, де Q_D – обсяг попиту (у тисячах житлових одиниць), P – ціна (у тис. дол. за житлову одиницю).

1. Обчисліть рівноважну ціну та кількість житла на житловому ринку та проілюструйте рівновагу на графіку.
2. Визначте коефіцієнт еластичності попиту у точці рівноваги.

Завдання 2

Ви розглядаєте дві альтернативні можливості придбання квартири. Згідно з першим варіантом Ви маєте заплатити 10000 дол. відразу, а потім по 3600 дол. щорічно протягом 5 років. Згідно з другим варіантом Ви повинні заплатити 13500 дол. відразу, а потім щорічно платити 3540 дол. протягом 4 років. Якому варіанту ви віддасте перевагу, якщо коефіцієнт дисконтування дорівнює 10%?. (Табличні значення фактору дисконтування при 10% ставці складають: 1 рік – 0,909; 2 роки – 0,826; 3 роки – 0,751; 4 роки – 0,683; 5 років – 0,621).

Завдання 3

Відповідно до індивідуальної трудової угоди працівник малого підприємства отримує 1000 грн. заробітної плати. У поточному році його заробітну плату було збільшено на 20%. Водночас ціни на споживчі товари та послуги протягом року також зросли на 9%. Яким буде приріст реальної заробітної плати і яку її величину отримає працівник?

Завдання ІІ рівня (по 4 бали)

Завдання 4

У таблиці, наведеній нижче, відображені показники діяльності фірми, яка функціонує на конкурентному ринку:

№	**P**	**Q**	**TR**	**TC**	**FC**	**VC**	**AC**	**AVC**	**MC**
1		1000	5000		1500			5,50	5,00
2		5	30				6	5	6
3	5				3,9	14,1		4,7	2,0

Обсяг продукції, що виробляється фірмою, є таким, що при його збільшенні граничні витрати фірми зростають.

1. Заповніть таблицю, внісши у неї цифри відповідно до визначених Вами величин P, TC, VC, AC.
2. Що повинна зробити фірма у даному випадку?
а) зменшити випуск продукції;
б) збільшити випуск продукції;
в) закрити фірму;
г) нічого не змінювати.
3. Зробіть прогноз щодо подальшої діяльності фірми. Поясніть свою відповідь.

Завдання 5

Джон має блискучу ідею щодо виробництва нової зубної пасти. Він знає, що якщо він розпочне її виробництво, він займатиме на ринку цього революційного продукту становище близьке до монопольного. Початкові витрати виробництва складають 5000 дол. За оцінками Джона граничні витрати на виробництво 1 тюбика зубної пасти дорівнюють 5 дол. Після ретельного дослідження ринкової ситуації у місцевому супермаркеті він оцінює попит на свій майбутній продукт

у рідному місті на рівні, що описується кривою Q_D= 2000 – 100P, де Q_D – обсяг попиту, шт., P – ціна у дол. за шт.

1. Припустимо, Джон не може здійснювати цінову дискримінацію. Виведіть криву валового доходу Джона як функції від випуску продукції.
2. Знайдіть функцію валових витрат виробництва нової зубної пасти.
3. Якою є кількість нової зубної пасти, що максимізує прибуток від її виробництва. За якою ціною Джону слід продавати нову зубну пасту?
4. Визначте сукупний прибуток від виробництва зубної пасти.

Завдання 6

1. Використовуючи дані таблиці, наведеної нижче, розрахуйте індекс споживчих цін для 2005 р. (базовий рік – 1991-й).

Найменування	**Кількість**	**Ціна, дол.**	
		1991 р.	2004 р.
Сорочки	1	10	25
Булки	25	0,55	2
Зошити	12	2	7
Підручники	6	12	30
Джинси	3	12	25
Шкарпетки	5	0,20	1,2

3. Припустимо, що індекс цін на споживчі товари у 2004 р. враховує лише два товари: їжу та житло. Частка продуктів харчування складає 0,33, а житла – 0,67. Ціни на продукти харчування зросли на 20%, а на житло знизились на 2%. Яким є темп інфляції за рік?

Завдання III рівня (по 7 балів)

Завдання 7

На ринку авіаперевезень панує єдина компанія ABC. Відомо, що граничні витрати одного рейсу складають 40 $. На ринку є два типи пасажирів: багаті бізнесмени та бідні студенти. Попит кожного типу споживачів поданий у таблиці:

№	Ціна	Попит бізнесменів	Попит студентів
1	140	0	0
2	130	8	0
3	120	9	1
4	110	10	2
5	100	11	3
6	90	12	4
7	80	13	5
8	70	14	6

Дайте відповіді на питання:

а) якою була б ціна, якби компанія вирішила призначити єдину ціну на білет?;

б) які ціни призначила б компанія за цінової дискримінації?;

в) яку (які) ціни призначила б компанія для максимізації сукупного прибутку від польотів?

Завдання 8

За наведеними нижче гіпотетичними даними Системи національних рахунків розрахуйте такі номінальні показники для 2005 р.:

а) обсяг ВНП за потоком витрат;

б) обсяг ЧНП;

в) особистий дохід після сплати податку, тобто особистий дохід, що надходить у споживання;

Спираючись на результати розрахунків визначте, чому дорівнював індекс цін (дефлятор ВНП) у 2005 р., якщо відомо, що реальний ВНП у 2005 р. складав 276,92 млрд. грош. од.?

№	Показники	Млрд. грош. од.
1	Чисті приватні внутрішні інвестиції	33
2	Споживчі витрати	245
3	Заробітна плата	221
4	Нерозподілений прибуток корпорацій	21
5	Державні закупівлі товарів та послуг	72
6	Відсотки за капітал	13
7	Рентні платежі власникам орендованого майна	14
8	Чистий експорт товарів і послуг	3
9	Амортизація	27
10	Податки на прибутки корпорацій	19
11	Внески корпорацій на соціальне страхування	20
12	Непрямі податки, неподаткові зобов'язання і трансфертні платежі, які виплачуються приватним підприємцям	18
13	Трансфертні платежі населенню	12
14	Доходи некорпоративного підприємницького сектору	31
15	Податки на доходи фізичних осіб	26
16	Дивіденди	16
17	Особисті заощадження	16

Завдання 9

Квентін любить обідати у ресторані, R, та купувати одяг, C. Його функція корисності від споживання задана рівнянням U=R*C, де U – корисність від споживання, ютілів, а R та C – кількості спожитих товарів, одиниць. При цьому Квентін витрачає 10 євро на придбання 1 одиниці одягу (C) або на один обід у своєму улюбленому ресторані (R). Його щомісячний дохід складає 100 євро.

1. Виразіть математично оптимальний ринковий кошик Квентіна. Якою є корисність цього оптимального набору?

2. Улюблений ресторан Квентіна пропонує йому членство у клубі постійних відвідувачів, яке коштує 50 євро на місяць, проте дає йому можливість купувати обід за ціною 2,5 євро. Виразіть математично оптимальний споживчий вибір. Якою є корисність цього нового оптимального набору? Чи прийме Квентін рішення стати членом клубу постійних відвідувачів?

3. Зобразіть графічно обидві ситуації споживчого вибору з відповідними кривими байдужості та бюджетними обмеженнями. Які висновки Ви можете зробити з цього графічного аналізу?

Голова предметної комісії з економіки	***Филюк Галина Михайлівна*** *- доцент кафедри теоретичної та прикладної економіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат економічних наук*
Член предметної комісії з економіки	***Чубук Леся Петрівна*** *- доцент кафедри теоретичної та прикладної економіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка, кандидат економічних наук*

Фізико-математичне відділення

Контрольні завдання з фізики

9 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Знайдіть тиск на дні Маріанської западини на глибині 11 км
2. Яку потужність розвиває людина масою 70 кг, яка піднімається по сходах на висоту 5 м за 10 с?
3. Яку відстань пролетить по горизонталі тіло, кинуте зі швидкістю v=10 м/с під кутом 50 градусів до горизонту?

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Маса нейтронної зорі дорівнює масі Сонця – $2 \cdot 10^{30}$ кг. В її околицях перша космічна швидкість дорівнює 0.1 швидкості світла. Знайдіть радіус орбіти для даного значення першої космічної швидкості.
5. Під час фотографування на об’єктив фотоапарата сіла муха. Як це вплине на фотознімок?
6. 27 жовтня 2005 року о 19 годині співробітники спеціальної астрофізичної обсерваторії виявили об’єкт, що рухався прямо на Землю. Виміряна у момент відкриття відстань до об’єкта дорівнювала 10 астрономічним одиницям (1 астрономічна одиниця дорівнює приблизно 150 000 000 км). О 19 год 40 хв об’єкт було виявлено на відстані 5 астрономічних одиниць від Землі. Визначити, з якою швидкістю об’єкт наближався до Землі.

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. Діаметр однієї кульки більший удвоє, ніж діаметр другої. Після початкового періоду прискореного руху кулі рівномірно падають у повітрі. Густина їх однакова. Сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості і площині поперечного перерізу кулі (площині великого круга). Визначити, у скільки разів відрізняються швидкості падіння.
8. При додержанні певної обережності воду можна переохолодити до температури t_1= -10 °С. Яка маса льоду утвориться, якщо кинути у воду шматочок льоду масою 100 г при температурі t_2= -5 °С? Маса води M=1 кг, теплоємність води вважати незалежною від температури, теплоємність льоду 2100 Дж/кг/°С.
9. У посудину налито ртуть і поверх неї масло. В цю посудину опускають брусок прямокутної форми, який повільно тоне в маслі, зберігаючи весь час горизонтальне положення своєї основи. Частково занурившись у ртуть, брусок зупиняється. Знайти, яка частина бруска занурилась у ртуть. Питома вага ртуті d_1=13.6 г/см^3, масла d_2=0.9 г/см^3, бруска d_3=2.7 г/см^3.

Контрольні завдання з фізики

10 клас

Завдання I рівня (по 2 бали)

1. Вантаж починає вільно падати вертикально вниз. У скільки разів робота сили тяжіння за першу секунду падіння вантажа буде меншою за роботу за другу, наступну секунду падіння?
2. Тіло якої найбільшої маси можна підняти за допомогою сталевого дроту діаметром d = 0,2 мм, якщо межа міцності на розрив для сталі $\sigma = 6\cdot 10^8$ Па?
3. Дві лампи, опори яких дорівнюють 300 Ом та 500 Ом, увімкнені в електричне коло паралельно. Яка з ламп споживає більшу потужність і в скільки разів?

Завдання II рівня (по 4 бали)

4. Об’єм повітряної бульбашки під час її піднімання з дна озера на поверхню збільшується в n разів. Якою є глибина озера? Атмосферний тиск p_0, зміною температури води з глибиною знехтувати.
5. Електричний заряд рівномірно розподілено по поверхні провідної кулі з поверхневою густиною σ. Знайти напруженість електричного поля в точці, що знаходиться від поверхні кулі на відстані, яка дорівнює її діаметру. Куля знаходиться у вакуумі.
6. Повітряний конденсатор ємністю C = 100 пФ зарядили до напруги U_1 = 4,5 В. Якою буде напруга на конденсаторі U_2 після того, як у простір між його обкладинками внесли пластину з ебоніту з діелектричною проникливістю ε = 2,7 ?

Завдання III рівня (по 7 балів)

7. У кастрюлі теплоємністю 300 Дж/К один літр води закипає за 5 хв. Знайти, за який час після початку кипіння вода в кастрюлі повністю википить, якщо початкова температура води 20 °C. Питома теплоємність води c = 4,18 Дж/(г·К), її питома теплота пароутворення $q_{пар}$ = 2250 Дж/г. Випаровуванням води під час нагрівання до температури кипіння знехтувати.
8. Визначити довжину вільного пробігу λ електронів в електронній трубці, якщо напруженість електричного поля в ній дорівнює $E = 2\cdot 10^4$ В/м, а робота іонізації A = 15,8 еВ.
9. При електролізі розчину сірчаної кислоти витрачається потужність P = 37 Вт. Знайти опір електроліта, якщо за час t = 50 хв виділяється маса водню m = 0,3 г. Молярна маса водню μ = 1 г/моль, його валентність z = 1.

Контрольні завдання з фізики

11 клас

Завдання І рівня (по 2 бали)

10. Якою мінімальною силою можна перекинути через ребро куб, що стоїть на горизонтальній поверхні? Маса куба 2 кг.
11. В результаті деякого процесу з заданою кількістю газу його тиск зріс у 2 рази, а температура понизилась на 20%. У скільки разів змінився об’єм газу?
12. В коливальному контурі заряд на конденсаторі ємністю 1 мкФ змінюється з часом за законом $q = 5 \cdot 10^{-6} \cos(10^4 t)$. Чому дорівнює період коливань даного контура?

Завдання ІІ рівня (по 4 бали)

13. Струмінь води перерізом 6 см^2 б’є в стінку під кутом 60^o до нормалі і пружньо відбивається від неїє З якою силою струмінь діє на стінку, якщо швидкість його становить 12 м/с?
14. На лінзу з оптичною силою 4 дптр падає паралельний пучок променів під кутом 15^o до головної оптичної осі. На якій відстані від лінзи промені перетнуться між собою?
15. На скільки відсотків зменшиться різниця потенціалів на клемах джерела з внутрішнім опором r якщо до нього приєднати резистор з опором R=7r?

Завдання ІІІ рівня (по 7 балів)

16. Літак має 4 двигуни, кожний з яких розвиває силу тяги у 30 кН, ККД кожного з двигунів 25%. Знайти витрату гасу на переліт у 1000 км. Питома теплота згоряння гасу 50 МДж/кг.
17. По котушці з індуктивністю 1 мГн тече змінний струм, амплітуда якого 10 мА, циклічна частота 400 с$^{-1}$. Яку амплітуду має ЕРС самоіндукції в котушці?
18. Робота виходу для катода фотоелемента 4 еВ. При опроміненні цього катода світлом з довжиною хвилі λ запірна напруга фотоелемента становить 1 В. Якою буде запірна напруга, якщо катод опромінювати світлом з довжиною хвилі $\lambda/2$?

Голова предметної комісії з фізики

***Засєдка Людмила Миколаївна** – вчитель ліцею № 41 «Голосіївський м. Києва, кандидат фізико-математичних наук*

Відділення обчислювальної техніки та програмування

Контрольні завдання з математики

9 клас

І рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється у 2 бали)

1. **Розв'язати рівняння**

$\left(\sqrt{x-7}\right)\left(x^4-29x^2+100\right)=0$

Розв'язання:

$\left(\sqrt{x-7}\right)\left(x^4-29x^2+100\right)=0$

ОДЗ: $x\epsilon[0;+\infty]$

$\sqrt{x-7}=0$ або $x^4-29x^2+100=0;$ $\left|\begin{array}{l} x^2=4 \\ x^2=25 \end{array}\right.$

x=49 або $\left|\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=-5 \\ x=5 \end{array}\right.$

Враховуючи ОДЗ, коренями рівняння є числа 49; 2; 5

<u>Відповідь:</u> 2;5;49

2. Побудувати графік функції

$$y=\frac{x^2-10x+25}{x-5}-\frac{2x-x^2}{x}$$

Розв'язання:

Область визначення функції: $x\epsilon(-\infty;0)\cup(0;5)\cup(5;+\infty)$.

Перетворимо праву частину рівняння:

$$\frac{(x-5)^2}{x-5}-\frac{x(2-x)}{x}=x-5-2+x=2x-7$$

маємо $y=2x-7$

3. Розв'язати нерівність:

$$\frac{x^2-7x+12}{(x-2)^2}\geq 0$$

Розв'язання:

$$\begin{cases}(x^2-7x+12)(x-2)^2 \geq 0\\ (x-2)^2 \neq 0\end{cases} \quad \begin{cases}x^2-7x+12 \geq 0\\ x \neq 2\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x \geq 4\\ x \leq 3\end{array}\right.\\ x \neq 2\end{cases}$$

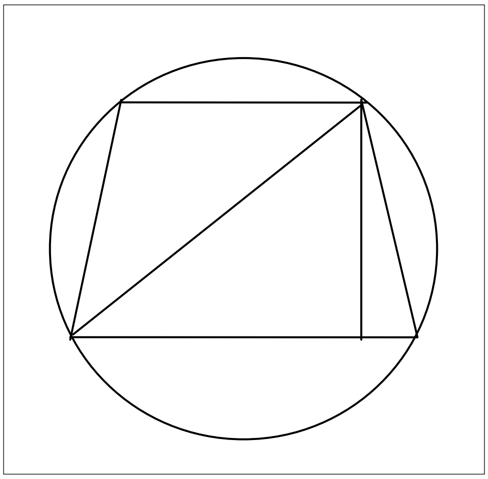
<u>Відповідь</u>: $x \in (-\infty;2) \cup (2;3] \cup [4;+\infty)$.

II рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється у 4 бали)

4. Розв'язати задачу

Висота рівнобедреної трапеції дорівнює 14 см, а основи 16 см і 12 см. Визначити площу круга, обмеженого описаним навколо трапеції колом.

Розв'язання:



За умовою задачі AD=16 см, BC=12 см, CN=14 см.

Оскільки трапеція рівнобедрена, то $AN = \frac{AD+BC}{2} = \frac{16+12}{2} = 14$ (см);

$ND = \frac{AD-BC}{2} = \frac{16-12}{2} = 2$ (см).

В прямокутному ΔANC CN=AN=14 см. Отже, ΔANC – прямокутний, рівнобедрений і $\angle CAN = 45^0$. $\angle CAD = \angle CAN = 45^0$.

Для ΔACD запишемо теорему синусів:

$$\frac{CD}{\sin \angle CAD} = 2R.$$

З прямокутного ΔCND: $CD = \sqrt{CN^2 + ND^2} = \sqrt{196+4} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ (см)

$$R = \frac{CD}{2\sin \angle CAD} = \frac{10\sqrt{2}}{2\sin 45^0} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10 \text{ (см).}$$

$$S_{кр} = \pi R^2 = 100\pi (см)^2$$

Відповідь: $100\pi(см)^2$

5) Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3y^2 + xy - x + 4y - 7 = 0 \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання:

Помножимо перше рівняння системи на 2 і від першого рівняння віднімемо друге. Тоді

$$5y^2 + 10y - 15 = 0, y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = -3; \\ y = 1. \end{array}\right.$$

Підставимо кожне із знайдених значень у систему рівнянь

1)

$$y = -3,$$

$$27 - 3x - x - 12 - 7 = 0$$

$$-4x = -8$$

$$x = 2$$

Отже (2;-3) – розв'язок системи.

2) y=1

$$3 \cdot 1 + x \cdot 1 - x + 4 \cdot 1 - 7 = 0$$

$$0 = 0$$

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Отже: y=1, $x \in R$ - розв'язок системи.

Відповідь: (2;-3); коли y=1, то $x \in R$

6) Спростити вираз

Розв'язок:

$$\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{ctg\alpha - tg\alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}} + 1, \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$$

$$\sqrt{\frac{2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha \cos\alpha}{\cos 2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} + 1 = \sqrt{\sin^2 2\alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} + 1 = |\sin 2\alpha| \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} + 1.$$

За умовою $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, тоді $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2α - кут III чверті і $\sin 2\alpha < 0$. Отже,

$$|\sin 2\alpha| \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} + 1 = -\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} + 1 = 1 - 2ctg\alpha$$

Відповідь: $1 - 2ctg\alpha$

III рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

7) Розв'язати задачу*

Один турист вийшов о 6 годині, а другий назустріч йому о 7 годині. Вони зустрілись о 8 годині і, не зупиняючись, продовжили шлях. Скільки часу витратив кожний з них на весь шлях, якщо перший прийшов на те місце, з якого вийшов другий, на 28 хвилин пізніше, ніж другий прийшов на те місце , з якого вийшов перший? Вважаємо, що кожний рухався без зупинок і зі сталою швидкістю.

Розв'язання:

Нехай S – шлях, який пройшов кожний з туристів; x - час, що витратив перший турист на весь шлях, y - час, що витратив на весь шлях другий турист.

$\frac{S}{x}$ - швидкість першого туриста

$\frac{S}{x-1\frac{7}{15}}$ - швидкість другого туриста.

Враховуючи, що перший турист до зустрічі йшов 2 год., а другий турист 1 годину, маємо рівняння:

$$2 \cdot \frac{S}{x} + 1 \cdot \frac{S}{x - 1\frac{7}{15}} = S$$

$$2 \cdot \frac{S}{x} + 1 \cdot \frac{S}{x - 1\frac{7}{15}} = S$$

$$\frac{2}{x} + \frac{15}{15x-22} - 1 = 0$$

$$30x - 44 + 15x - 15x^2 + 22x = 0$$

$$15x^2 - 67x + 44 = 0$$

$$D = 4489 - 2640 = 1849 = 43^2$$

$$x = \frac{67-43}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$$

$$x = \frac{67+43}{30} = \frac{110}{30} = \frac{11}{3}$$

За умовою x>0. Умову задачі задовольняє корінь $x = \frac{11}{3}$.

Отже, перший турист витратив на весь шлях $\frac{11}{3}$год=3год40 хв, а другий

$$\frac{11}{3} - 1\frac{7}{15} = 2\text{год}12\text{хв}$$

Відповідь: 3 год 40 хв; 2 год 12 хв.

*Задача перевіряється членом комісії і за зміненою умовою.
Відповідь: 3 год12 хв і 2 год 40 хв

8) Розв'язати рівняння

$$(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 4x + 5) = 2(x+1)^2$$

Розв'язання:

$(x^2+3x+4)(x^2+4x+5)=2(x+1)^2$

$(x^2+3x+4)^2+(x^2+3x+4)(x+1)=2(x+1)^2 \mid \vdots (x+1)^2 \neq 0$

$(\frac{x^2+3x+4}{x+1})^2+\frac{x^2+3x+4}{x+1}-2=0$

Вводимо заміну: $\frac{x^2+3x+4}{x+1}=t$

$t^2+t-2=0; t=-2$ або $t=1$

1) $\frac{x^2+3x+4}{x+1}=-2$

$x^2+5x+6=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \end{array}\right.$

2) $\frac{x^2+3x+4}{x+1}=1$

$x^2+2x+3=0$

$D=1-3=-2<0$

Рівняння дійсних коренів не має.

<u>**Відповідь:**</u> -3;-2.

9) При яких значеннях параметра *m* нерівність $(m^2-3)x^2-2(m+1)x+9<0$ **справджується при будь-якому значенні *x*?**

Розв'язання:

Квадратична функція $y=(m^2-3)x^2-2(m+1)+9$ набуває від'ємних значень при будь-якому значенні x тоді і тільки тоді, коли її дискримінант $D=4(m+1)^2-36(m^2-3)$ і перший коефіцієнт (m^2-3) набувають від'ємних значень.

Розв'яжемо систему:

$\begin{cases} 4(m+1)^2-36(m^2-3)<0; \\ m^2-3<0; \end{cases}$

$\begin{cases} -4m^2+m+14<0; \\ m^2<3; \end{cases}$

$\begin{cases} 4m^2-m-14>0; \\ m^2<3; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-\frac{7}{4}; \\ m>2; \end{array}\right. \\ -\sqrt{3}<m<\sqrt{3} \end{cases}$

Остання система немає розв'язків.

<u>**Відповідь:**</u> розв'язків немає.

Голова предметної комісії з математики

Прокопенко Наталія Сергіївна – *головний спеціаліст департаменту загальної середньої та дошкільної освіти Міністерства освіти і науки України*

Контрольні завдання з математики

10 клас

І рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється у 2 бали)

1) Спростити вираз

$$\sqrt{(\sqrt{a}+2)^2-8\sqrt{a}+\sqrt{(\sqrt{a}-2)^2+8\sqrt{a}}}$$

Розв'язання:

$$\sqrt{(\sqrt{a}+2)^2-8\sqrt{a}+\sqrt{(\sqrt{a}-2)^2+8\sqrt{a}}} =$$

$$=\sqrt{(\sqrt{a}+2)^2-8\sqrt{a}+\sqrt{a-4\sqrt{a}+4+8\sqrt{a}}} =$$

$$=\sqrt{a-4\sqrt{a}+4+\sqrt{a+4\sqrt{a}+4}} =$$

$$=\sqrt{a-4\sqrt{a}+4+\sqrt{(\sqrt{a}+2)^2}} =$$

$$=\sqrt{a-4\sqrt{a}+4+\sqrt{a}+2} =$$

$$=\sqrt{a-3\sqrt{a}+6}$$

<u>**Відповідь:**</u> $\sqrt{a-3\sqrt{a}+6}$

2)Побудувати графік функції

$$y=\frac{x^3+2x^2-3x}{x}$$

Розв'язання:

Область визначення $x \neq 0$

$$y=\frac{x^3+2x^2-3x}{x}=\frac{x(x^2+2x-3)}{x}=x^2+2x-3$$

$y=x^2+2x-3$ – графік функції – парабола.

(0;-3) – точка перетину з віссю *оу*.

(-3;0) – точка перетину з віссю *ох*

(1;0) - точка перетину з віссю *ох*

$$x_b=-\frac{b}{2a}=-1$$

$$y_b=-4$$

(-1;-4) – вершина параболи.

Враховуючи ОДЗ, будуємо графік.

3) Розв'язати нерівність

$$(x^2+2x+1)(x^2-6x-16)<0$$

Розв'язання:

$$(x+1)^2(x+2)(x-8)<0$$

$(x+1)^2>0$ при будь-яких x крім -1: $x \neq -1$

$(x+2)(x-8)<0$

$-2<x<8$

Отже, $x \in (-2;-1) \cup (-1;8)$

Відповідь: $x \in (-2;-1) \cup (-1;8)$

II рівень (повне і правильне розв’язання оцінюється у 4 бали)

4) Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 2 \\ xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

Розв’язання:

Заміна $y = xt$

$$\begin{cases} x^2 - 2x^2t - x^2t^2 = 2 \\ x^2t + x^2t^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(1-2t-t^2) = 2 \\ x^2(t+t^2) = 4 \end{cases}$$

Перевіркою переконуємось, що x=0 - не є розв’язком системи, а тому поділимо перше рівняння на друге

$$\frac{1-2t-t^2}{t+t^2} = \frac{1}{2}$$

$$2-4t-2t^2 = t+t^2$$

$$3t^2+5t-2=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-5-7}{6} = -2 \\ t_2 = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

1) $t=-2;$

$y=-2x$

$-2x^2+4x^2=4$

$2x^2=4$

$x^2=2$

$$\left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=2\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

2) $t=\dfrac{1}{3}$

$y=\dfrac{1}{3}x$

$x=3y$

$3y^2+y^2=4$

$y^2=1$

$$\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Відповідь: $(-\sqrt{2};2\sqrt{2;});(\sqrt{2};2\sqrt{2});(-1;-3);(1;3)$

5) **Розв'язати задачу**

Більша основа рівнобедреної трапеції втричі більша за її меншу основу, а площа трапеції дорівнює $64\sqrt{2}$ см^2. Знайти периметр трапеції, якщо її діагональ поділяє тупий кут пополам.

Розв'язання

Нехай BC=x см, тоді AD=3x см. За умовою задачі, кут BCA дорівнює куту ACD.

$\angle BCA = \angle CAD$ - як внутрішні різносторонні кути при паралельних AD і BC та січній AC.

Отже, трикутник ACD – рівнобедрений і AD=CD=AB=3x *см*. Звідси P_{ABCD}=3·3x+x=10x (*см*).

BM і CN – висоти трапеції, тоді

AM=MN=ND=x

З трикутника BAM за теоремою Піфагора h=BM=2$\sqrt{2}\,x$

$$S_{ABCD} = 4\sqrt{2}x^2$$

$$4\sqrt{2}x^2 = 64\sqrt{2} \Rightarrow \text{x} = 4$$

P_{ABCD}=40 *см*

<u>Відповідь:</u> 40 *см*

6) **Розв'язати систему рівнянь**

$$\begin{cases} xy + yz = 8; \\ yz + zx = 9; \\ zx + xy = 5. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{cases} 2xy + 2yz + 2xz = 22; \\ xy + yz = 8; \\ yz + zx = 9; \\ zx + xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} xy + yz + xz = 11; \\ xy + yz = 8; \\ yz + zx = 9; \\ zx + xy = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} xz + 8 = 11; \\ xy + 9 = 11; \\ yz + 5 = 11; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xz = 3; \\ xy = 2; \\ yz = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2y^2z^2 = 36; \\ xz = 3; \\ xy = 2; \\ yz = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} xyz = 6; \\ xz = 3; \\ xy = 2; \\ yz = 6 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} xyz = -6; \\ xz = 3; \\ xy = 2; \\ yz = 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = 3; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = -1; \\ y = -2; \\ z = -3; \end{cases}$$

<u>Відповідь:</u> (1;2;3); (-1;-2;-3)

III рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

7) Розв'язати рівняння:

$$(x^3-9x^2-x+9)^4+(x^3+3x^2-x-3)^2=0 \qquad (1)$$

Розв'язання

Ліва частина рівняння (1) – це сума невід'ємних чисел. За умовою ця сума повинна дорівнювати нулю, Але це можливо лише тоді, коли кожний додаток дорівнюватиме нулю, причому при одному й тому самому значенні х. Тому маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^3-9x^2-x+9=0; \\ x^3+3x^2-x-3=0; \end{cases} \begin{cases} x(x^2-1)-9(x^2-1)=0; \\ x(x^2-1)+3(x^2-1)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2-1)(x-9)=0; \\ (x^2-1)(x+3)=0; \end{cases} \begin{cases} (x-1)(x+1)(x-9)=0;(2) \\ (x-1)(x+1)(x+3)=0;(3) \end{cases}$$

Бачимо, що ліві частини рівнянь (2) і (3) одночасно дорівнюють нулю при

$x=\pm 1.$

Відповідь: -1;1.

8) Розв'язати задачу

У двох посудинах міститься кислота різної концентрації, причому у першій на 5 л менше, ніж у другій. З кожної посудини взяли одночасно по 6 л і взяте з першої перелили в другу, а взяте з другої – в першу. Після цього концентрація кислоти в обох посудинах стала однаковою. Скільки літрів кислоти було в кожній посудині спочатку?

Розв'язання:

Нехай в першій посудині - х л р%-ної кислоти, у другій (х+5) л q% кислоти.

Складемо рівняння. $\dfrac{(x-6)p+6q}{x}=\dfrac{(x-1)q+6p}{x+5};$

$$\frac{xp}{x}-\frac{6p}{x}+\frac{6q}{x}-\frac{xq}{x+5}+\frac{q}{x+5}-\frac{6p}{x+5}=0$$

$$p(1-\frac{6}{x+5}-\frac{6}{x})+q(\frac{6}{x}-\frac{x}{x+5}+\frac{1}{x+5})=0$$

$$p(1-\frac{6}{x+5}-\frac{6}{x})+q(\frac{6}{x}-1+\frac{5}{x+5}+\frac{1}{x+5})=0$$

$$p(1-\frac{6}{x+5}-\frac{6}{x})-q(1-\frac{6}{x+5}-\frac{6}{x})=0$$

$$(p-q)(1-\frac{6}{x+5}-\frac{6}{x})=0$$

$p\neq q$ - за умовою задачі, тому $1-\dfrac{6}{x+5}-\dfrac{6}{x}=0$

$$\frac{x^2+5x-6x-6x-30}{x(x+5)}=0; x^2-7x-30=0; \left[\begin{array}{l} x=10; \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Умову задачі задовольняє корінь x=10. Отже, в першій посудині спочатку було 10 л кислоти, а в другій – 15 л.
Відповідь: 10л; 15л.

9) При яких значеннях а обидва корені рівняння $(a-1)x^2+(3a+1)x+6a=0$ **менші, ніж -2?**

Розв'язання:

Нагадаємо, що якщо дискримінант квадратного рівняння дорівнює нулю, то рівняння має два кореня, що співпадають.

Скористаємось теоремою: корені квадратичного тричлена $f(x)=ax^2+bx+c$ обидва менші за число α тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} af(\alpha)>0; \\ -\dfrac{b}{2a}<\alpha; \\ D\geq 0. \end{cases}$$

Тоді:

$$\begin{cases} (a-1)f(-2)>0; \\ x_0=-\dfrac{3a+1}{2(a+1)}<-2; \\ D=(3a+1)^2-24a(a-1)\geq 0; \end{cases} \begin{cases} (a-1)(4a-6)>0; \\ \dfrac{3a+1}{2(a-1)}>2; \\ 15a^2-30a-1\leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-1)(a-\frac{3}{2})>0 \\ (a-1)(a-5)<0 \\ 15a^2-30a-1\leq 0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>\dfrac{3}{2} \\ a<1 \end{array}\right. \\ 1<a<5 \\ \dfrac{15-4\sqrt{15}}{15}\leq a\leq \dfrac{15+4\sqrt{15}}{15} \end{cases}$$

Відповідь: $a\in(\frac{3}{2};1+\frac{4}{\sqrt{15}}]$

Голова предметної комісії з математики

Прокопенко Наталія Сергіївна *– головний спеціаліст департаменту загальної середньої та дошкільної освіти Міністерства освіти і науки України*

Контрольні завдання з математики

11 клас

І рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється у 2 бали)

1) Розв'язати рівняння

$x^4 - 11\sqrt{x^4+19} + 29 = 0$

Розв'язання:

Заміна:

$\sqrt{x^4+19} = t \geq 0, x^4+19 = t^2$
$t^2 - 11t + 10 = 0;$
$t_1 = 1,$
$t_2 = 10$

1) $\begin{matrix} x^4 + 19 = 1 \\ x^4 = -18 \end{matrix}$

Рівняння не має розв'язків

2) $\begin{matrix} x^4 + 19 = 100 \\ x^4 = 81 \\ x = \pm 3 \end{matrix}$

<u>Відповідь: ± 3</u>

2) Розв'язати нерівність

$3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leq 8$

Розв'язання:

ОДЗ**:** $x \in [0;+\infty)$

Заміна:

$3^{\sqrt{x}} = t > 0,$ **тоді** $t - \frac{9}{t} - 8 \leq 0;$ $\begin{cases} t^2 - 8t - 9 \leq 0 \\ t > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (t-9)(t+1) \leq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 < t \leq 9$

$0 < 3^{\sqrt{x}} \leq 9$

$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}} > 0; \\ 3^{\sqrt{x}} \leq 9; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0; \\ x \leq 4; \end{cases}$ $x \in [0;4]$

<u>Відповідь: [0;4]</u>

3) Побудувати графік функції

$y=\sqrt{\log_3^2 x}\cdot\log_x 3$

Розв'язання:

ОДЗ: $\begin{cases} x>0; \\ x\neq 1; \end{cases} \Rightarrow x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$

Тоді $y=|\log_3 x|\cdot\log_x 3$

Враховуючи означення модуля, матимемо:

1. $\log_3 x>0, x>1, |\log_3 x|=\log_3 x;\ \ y=\log_3 x\cdot\log_x 3=\log_3 x\cdot\dfrac{1}{\log_3 x}=1$

2. $\log_3 x<0, 0<x<1, |\log_3 x|=-\log_3 x;\ \ y=-\log_3 x\cdot\log_x 3=-\log_3 x\cdot\dfrac{1}{\log_3 x}=-1$

II рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється у 4 бали)

4) Розв'язати рівняння:

$5\sin 4x=6\cos^2 x$

Розв'язання:

$5\cdot 2\sin 2x\cos 2x=6\cos^2 x$

$5\cdot 2\sin x\cos x\cos 2x=6\cos^2 x$

При cosx=0, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi l, l\in Z$ - розв'язок даного рівняння.

При $\cos x\neq 0$ маємо:

$$10\sin 2x\cdot\cos 2x=6\cdot\frac{1}{1+tg^2x};$$

$$10\cdot\frac{2tgx}{1+tg^2x}\cdot\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{6}{1+tg^2x}$$

$$10tg\ x\cdot\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}=3$$

$$10(tgx-tg^3x)=3(1+tg^2x)$$

$$10tg^3x+3tg^2x-10tgx+3=0$$

Заміна: tgx=t;

$$10t^3+3t^2-10t+3=0$$

1) $t_1=\frac{1}{2}$

2) $5t^2+4t-3=0$

$\frac{D}{4}=4+15=19$

$$t_{2/3}=\frac{-2\pm\sqrt{19}}{5}$$

1) $tgx=\frac{1}{2},\ \ x=arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$

2) $tgx=\frac{-2-\sqrt{19}}{5}, x=arctg\frac{-2-\sqrt{19}}{5}+\pi k, k\in Z$, або

$tgx=\frac{-2+\sqrt{19}}{5}, x=arctg\frac{-2+\sqrt{19}}{5}+\pi m, m\in Z$

<u>Відповідь:</u> $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi l; arctg\frac{1}{2}+\pi n; arctg\frac{-2-\sqrt{19}}{5}+\pi k; arctg\frac{-2+\sqrt{19}}{5}+\pi m \mid l,n,k,m\in Z\ \right\}$

5) У коло радіуса $\sqrt{2}$ вписано трикутник, вершини якого поділяють коло на три частини у відношенні 2:5:17. Знайти площу трикутника.

Розв'язання:

Знайдемо значення кутів трикутника ABC.

$\alpha=\frac{2}{24}\cdot 180^0=15^0;\ \beta=\frac{5}{24}\cdot 180^0=37{,}5^0;\qquad \gamma=127{,}5^0$

Використовуючи теорему синусів, знайдемо дві сторони трикутника ABC.

$AC=2R\cdot\sin\beta;\ BC=2R\sin\alpha$

Площу трикутника ABC знайдемо за формулою $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin\gamma$

$$S_{\Delta ABC}=2R^2\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\sin\beta=4\cdot\sin 15^\circ\cdot\sin 37{,}5^\circ\cdot\cos 37{,}5^\circ=$$

$$=2\sin 15^\circ\sin 75^\circ=2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

<u>Відповідь:</u> $\frac{1}{2}$

6) Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} x+y+z=9; \\ x^2+y^2+z^2=35; \\ xyz=15 \end{cases}$$

Розв'язання:

Скористаємось формулою:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

Тоді $\begin{array}{l} 9^2 = 35+2(xy+xz+yz); \\ xy+xz+yz=23. \end{array}$

Отже, $\begin{cases} x+y+z=9; \\ xy+xz+yz=23; \\ xyz=15 \end{cases}$

x,y,z – корені рівняння $k^3-9k^2+23k-15=0$

(за теоремою, оберненої до теореми Вієта)

$k_1=1$; $\begin{array}{l} k^2-8k+15=0 \\ k_2=3; k_3=5. \end{array}$

Звідси: $\begin{cases} x=1; \\ y=3; \\ z=5; \end{cases} \begin{cases} x=1; \\ y=5; \\ z=3; \end{cases} \begin{cases} x=3; \\ y=1; \\ z=5; \end{cases} \begin{cases} x=3; \\ y=5; \\ z=1; \end{cases} \begin{cases} x=5; \\ y=1; \\ z=3; \end{cases} \begin{cases} x=5; \\ y=3; \\ z=1; \end{cases}$

Відповідь: (1;3;5); (1;5;3); (3;1;5);(3;5;1);(5;1;3);(5;3;1).

III рівень (повне і правильне розв'язання оцінюється у 7 балів)

7) Розв'язати рівняння

$$(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$$

Розв'язання:

$$(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$$

В лівій частині рівняння другу дужку помножимо на два, третю на шість, а праву частину рівняння помножимо на дванадцять. Одержимо:

$$(6x+5)^2(6x+4)(6x+6) = 420$$

$$(6x+5)^2((6x+5)-1)((6x+5)+1) = 420$$

Введемо заміну 6x+5=t, тоді

$$t^2(t-1)(t+1)=420$$
$$t^4-t^2-420=0$$

$t^2=21$ або $t^2=-20;$

$t^2=-20;$ рівняння не має розв'язків.

$t^2=21; t_1=-\sqrt{21}; t_2=\sqrt{21}$

$$\left[\begin{array}{l}6x+5=-\sqrt{21};\\ 6x+5=\sqrt{21};\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-5-\sqrt{21}}{6}\\ x=\dfrac{-5+\sqrt{21}}{6}\end{array}\right.$$

<u>Відповідь:</u> $\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{6}$

8) Один сплав складається з двох металів, які входять до нього у відношенні 1:2, а другий сплав містить ті самі метали у відношенні 2:3. Скільки треба взяти першого і другого сплавів, щоб отримати 44 кг нового сплаву з вмістом металів у відношенні 17:27?

Розв'язання

Нехай x і y – потрібна кількість першого та другого сплавів. Тоді у першому сплаві буде $\frac{x}{3}$ першого металу і $\frac{2x}{3}$ другого металу; у другому сплаві буде $\frac{2y}{5}$ першого металу і $\frac{3y}{5}$ другого металу. За умовою задачі складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}x+y=44;\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{2y}{5}=17;\end{cases}\begin{cases}x=44-y;\\ 5(44-y)+6y=255;\end{cases}\begin{cases}x=9;\\ y=35.\end{cases}$$

Отже, першого сплаву треба взяти 9 кг, а другого 35 кг.

<u>Відповідь:</u> 9 кг, 35 кг.

9) При яких значеннях *a* система $\begin{cases}\sin x\sin y=a\\ tgxtgy=\dfrac{1}{a}\end{cases}$ **має розв'язки?**

Розв'язання:

Очевидно, що $a \neq 0$. Тоді

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a; \\ \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \dfrac{1}{a}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \sin y = a; \\ \cos x \cos y = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos(x+y) = a^2 - a; \\ \cos(x-y) = a^2 + a \end{cases}$$

Система має розв'язки, якщо виконується система нерівностей

$$\begin{cases} -1 \le a^2 - a \le 1; \\ -1 \le a^2 + a \le 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} a^2 - a \ge -1 \\ a^2 - a \le 1; \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 + a \ge -1; \\ a^2 + a \le 1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \le a \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \le a \le \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$a \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2};0) \cup (0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$$

<u>Відповідь:</u> $[\frac{1-\sqrt{5}}{2};0) \cup (0;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$

Голова предметної комісії з математики

Прокопенко Наталія Сергіївна *– головний спеціаліст департаменту загальної середньої та дошкільної освіти Міністерства освіти і науки України*